Conjuntos numéricos: operações com números reais

Teoria

Números reais ($\mathbb{R}$)

Os números reais, representados por $\mathbb{R}$, são a união dos conjuntos dos racionais ($\mathbb{Q}$) com os irracionais ($\mathbb{I}$). Ao longo deste material, praticaremos cálculos envolvendo os números reais. Para aquecer, vejamos abaixo o primeiro exemplo:

> Coloque os números em ordem crescente: $\pi; \sqrt{5}; 2{,}3333\ldots; \pi - 1; \text{sen}60°; \sqrt{\sqrt{256}}$.
>
> Solução: primeiro, devemos reescrever esses números (em alguns casos, aproximando), para que possamos compará-los:
> $\pi \cong 3{,}14$
> $\sqrt{5} \cong 2{,}2$
> $\pi - 1 \cong 2{,}14$
> $\text{sen}60° \cong 0{,}86$
> $\sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{16} = 4$
>
> Agora, podemos escrevê-los em ordem crescente: $\text{sen}60°; \pi - 1; \sqrt{5}; 2{,}3333\ldots \pi; \sqrt{\sqrt{256}}$.

Dízima periódica e fração geratriz

Dízimas periódicas são números que possuem **infinitas casas decimais**; além disso, tais casas apresentam **algarismos que se repetem** infinitamente. A dízima periódica é resultado de uma fração, a qual chamamos fração geratriz (portanto, elas pertencem ao conjunto dos números racionais).

Assim como encontramos o valor da dízima realizando a divisão da fração geratriz, podemos realizar o caminho inverso e **converter a fração geratriz em dízima**. A forma fracionada de uma dízima periódica é obtida a partir de manipulações algébricas com potências de 10 e subtrações. Observe dois exemplos:

> Exemplo 1: $0{,}2222\ldots$
>
> Solução: chamemos a dízima original de x: $x = 0{,}222\ldots$
>
> Em seguida, multiplicamos os dois lados dessa relação por 10: $10x = 2{,}2222\ldots$
>
> Como as partes decimais desses números são idênticas, podemos realizar a seguinte subtração:
> $$\begin{array}{r} 10x = 2{,}222\ldots \\ \underline{-x = 0{,}222\ldots} \\ 9x = 2 \end{array} \rightarrow x = \frac{2}{9}$$
> Logo, a fração geratriz é $2/9$.

> Exemplo2: $1{,}05555\ldots$
>
> Sugestão: chamemos a dízima original de x: $x = 1{,}05555\ldots$
>
> Em seguida, multiplicamos os dois lados dessa relação por 10: $10x = 10{,}5555\ldots$
>
> Agora, multiplicamos os dois lados da relação por 100: $100x = 105{,}5555\ldots$
>
> Dessa forma, temos duas igualdades com partes decimais idênticas e podemos realizar a subtração:
>
> $$\begin{array}{r} 100x = 105{,}5555\ldots \\ \underline{-10x = 10{,}5555\ldots} \\ 90x = 95 \end{array} \rightarrow x = \frac{95}{90} \rightarrow x = \frac{19}{18}$$
>
> Logo, a fração geratriz é $19/18$.

Podemos ganhar tempo nessas contas com o “**macete do 9**”. Sempre que a parte inteira for zero e a parte decimal for toda composta pelo período, escrevemos o período no numerador da fração e, no denominador, colocamos um número 9 para cada algarismo do período. Observe estes exemplos:

> $$0{,}252525\ldots = \frac{25}{99}$$
> $$0{,}512512512\ldots = \frac{512}{999}$$
> $$1{,}22222\ldots = 1 + 0{,}222\ldots = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{99}$$

Simplificação de radicais

A radiciação é a operação inversa da potenciação. Ou seja, pensar em radiciação é pensar o processo da potenciação ao contrário. Exemplos:

> $$\sqrt[2]{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81$$
> $$\sqrt[3]{125} = 5 \Leftrightarrow 5^3 = 125$$
> $$\sqrt[4]{10000} = 10 \Leftrightarrow 10^4 = 10000$$

Quando a raíz não é um número que conseguimos calcular rapidamente de cabeça, podemos encontrar o resultado da seguinte forma: fatoramos o radicando para reescrevê-lo na forma de potência e depois vemos se é possível “cortar” o expoente de dentro do radicando com o índice da raiz.

Se tivermos, por exemplo, $\sqrt[2]{9}$, será o mesmo que escrever $\sqrt[2]{3^2}$. Vemos que o expoente do radicando é igual ao índice. Então, podemos “cortar” os expoentes: $\sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{3^2} = 3$. Vejamos outros exemplos:

> $$\sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 = 6$$
> $$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$
> $$\sqrt[2]{625} = \sqrt{5^4} = \sqrt[2]{5^2 \cdot 5^2} = 5 \cdot 5 = 25$$

Se, após a fatoração, o expoente encontrado no radicando não puder ser cortado com o índice, cortamos apenas o que der, e deixamos o restante dentro da raiz. Dessa forma, estamos simplificando o radical o máximo possível. Observe os exemplos:

> $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$
> $\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 5} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$
> $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Racionalização

Realizar divisões por números irracionais é uma tarefa difícil. Imagine dividir qualquer número por um irracional, que tem infinitas casas decimais sem qualquer padrão! Por isso, quando o denominador é um radical, é comum transformá-lo a partir de operações de multiplicação, a fim de que ele vire um número racional. Observe os três tipos de caso a seguir:

> Exemplo 1: **raiz quadrada no denominador**.
>
> $$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
>
> Explicação: quando o denominador é a raiz quadrada de algum número, multiplicamos a fração original "em cima" e "embaixo" por esse radical. Perceba que fazer essa multiplicação não altera o valor do número, uma vez que isso é o equivalente a multiplicá-lo por 1.

> Exemplo 2: **raiz quadrada no denominador envolvendo adição ou subtração**.
>
> $$\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
>
> $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{6}+2}{3-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{1} = \sqrt{6}+2$$
>
> Explicação: quando o denominador é uma soma ou subtração que envolve raiz quadrada, devemos usar outra estratégia: multiplicar a fração "em cima" e "embaixo" pelo conjugado do denominador; isto é, por algo quase idêntico a ele, só trocando o sinal do meio. Isso é eficaz, porque caímos no produto notável $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, o que elimina as raízes quadradas. Mais uma vez, fazer essa multiplicação não altera o valor do número, uma vez que é equivalente a multiplicá-lo por 1. Logo, essa estratégia é válida!

> Exemplo 3: **raiz maior que 2 no denominador**.
>
> $$\frac{6}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{4}}{2} = 3\sqrt[3]{4}$$
>
> Aqui, o denominador não é uma raiz quadrada, seu índice é maior que 2 (no exemplo, ele é igual a 3). Assim, devemos pensar em multiplicar a fração "em cima" e "embaixo" por um radical que nos possibilite utilizar a propriedade: $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Exercícios de fixação

1. Racionalize $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

2. Racionalize $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$.

3. Racionalize $\frac{4}{\sqrt[5]{8}}$.

4. Qual alternativa representa a dízima periódica 0,555...?

(A) 5/3.

(B) 5/2.

(C) 5/4.

(D) 5/9.

5. Qual é a dízima periódica representada pela fração 10/3?

(A) 0,333...

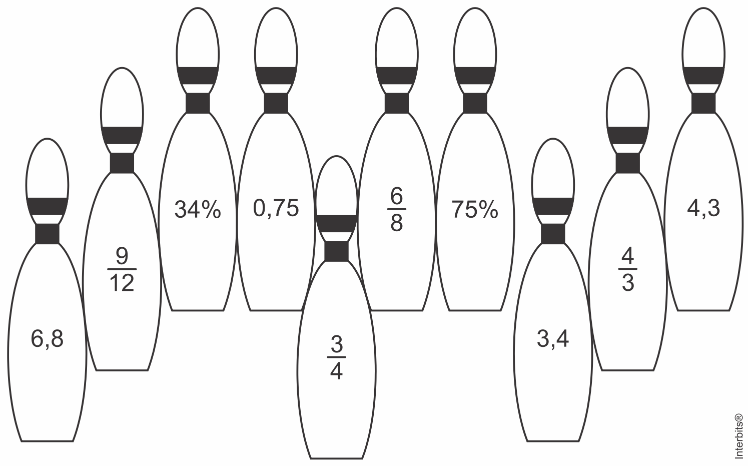
(B) 1,111...

(C) 3,0303...

(D) 3,333...

Exercícios de vestibulares

1. (Enem PPL, 2019) O boliche é um esporte cujo objetivo é derrubar, com uma bola, uma série de pinos alinhados em uma pista. A professora de matemática organizou um jogo de boliche em que os pinos são garrafas que possuem rótulos com números, conforme mostra o esquema.



O aluno marca pontos de acordo com a soma das quantidades expressas nos rótulos das garrafas que são derrubadas. Se dois ou mais rótulos representam a mesma quantidade, apenas um deles entra na contagem dos pontos. Um aluno marcou $7{,}55$ pontos em uma jogada. Uma das garrafas que ele derrubou tinha o rótulo $6{,}8$.

A quantidade máxima de garrafas que ele derrubou para obter essa pontuação é igual a

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.

(E) 6.

2. (Enem 2ª aplicação, 2016) Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.

Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos

(E) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{4}$.

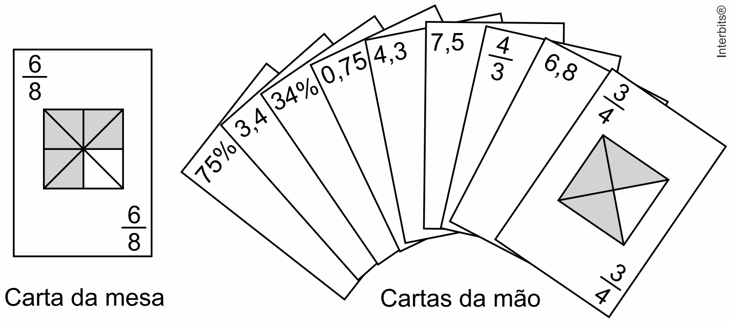
(F) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{3}{8}$.

(G) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$.

(H) $\frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}$.

(I) $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$.

3. (Enem, 2015) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado, No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:



Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

(A) 9.

(B) 7.

(C) 5.

(D) 4.

(E) 3.

4. (Enem PPL 2014) Um estudante se cadastrou numa rede social na internet que exibe o índice de popularidade do usuário. Esse índice é a razão entre o número de admiradores do usuário e o número de pessoas que visitam seu perfil na rede.

Ao acessar seu perfil hoje, o estudante descobriu que seu índice de popularidade é $0{,}3121212\ldots$ O índice revela que as quantidades relativas de admiradores do estudante e pessoas que visitam seu perfil são

(A) 103 em cada 330.

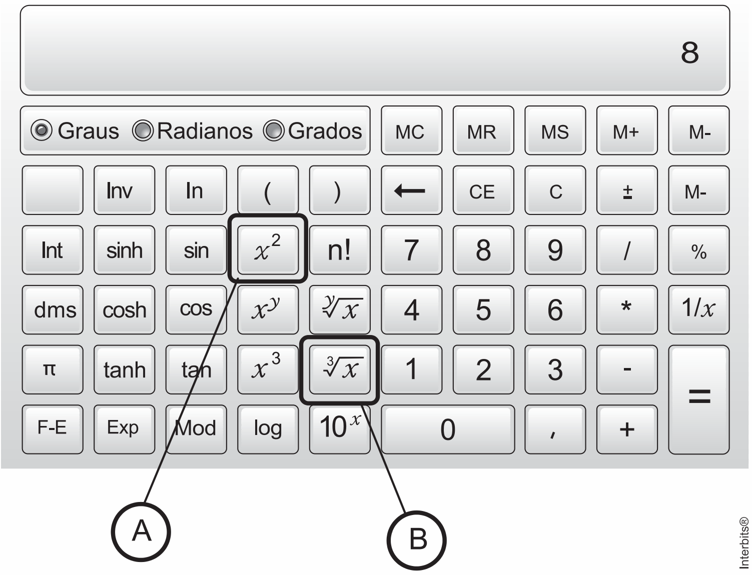
(B) 104 em cada 333.

(C) 104 em cada 3.333.

(D) 139 em cada 330.

(E) 1.039 em cada 3.330.

5. (Enem PPL, 2021) A imagem representa uma calculadora científica com duas teclas destacadas. A tecla A eleva ao quadrado o número que está no visor da calculadora, e a tecla B extrai a raiz cúbica do número apresentado no visor.



Uma pessoa digitou o número 8 na calculadora e em seguida apertou três vezes a tecla A e depois uma vez a tecla B.

A expressão que representa corretamente o cálculo efetuado na calculadora é

(J) $\sqrt[2]{8^{3+3+3}}$.

(A) $\sqrt[3]{8^{2\times2\times2}}$.

(B) $\sqrt[2]{8^3+8^3+8^3}$.

(C) $\sqrt[3]{8^2+8^2+8^2}$.

(D) $\sqrt[3]{8^2\times8^2\times8^2}$.

6. Apresente a fração resultado da expressão: $0{,}66666\ldots + 0{,}252525\ldots - 0{,}777777\ldots$

7. (Enem digital, 2020) Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$.

A ordem que esse aluno apresentou foi

(A) $\frac{1}{4}; \frac{5}{9}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$.

(B) $\frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{9}$.

(C) $\frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{5}; \frac{5}{9}$.

(D) $\frac{5}{9}; \frac{1}{4}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$.

(E) $\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{1}{4}; \frac{5}{9}$.

8. (UTFPR G1, 2016) Simplificando a expressão $\frac{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$ obtemos:

(A) $\frac{11\sqrt{2}}{2}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}+3$.

(C) $\frac{7}{2}+2\sqrt{2}$.

(D) $3+\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

(E) $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$.

9. (PUC-Rio, 2016) Quanto vale $\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}}$?

(A) $\sqrt[3]{3}$.

(B) $\sqrt[3]{9}$.

(C) $1+\sqrt[3]{3}$.

(D) $1+\sqrt[3]{9}$.

(E) $2\sqrt[3]{3}$.

10. (IFAL G1, 2011) O número $\mathrm{N}=\frac{1}{\sqrt{32+10\sqrt{7}}}+\frac{1}{\sqrt{32-10\sqrt{7}}}$ é um decimal ilimitado periódico. Se N for escrito sob a forma da fração irredutível $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ então $\mathrm{a}+\mathrm{b}$ é igual a:

(A) 11.

(B) 12.

(C) 13.

(D) 14.

(E) 15.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}^2-1^2} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{5-1} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$

3. $\frac{4}{\sqrt[5]{8}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{4\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{4\sqrt[5]{4}}{2} = 2\sqrt[5]{4}$

4. **D**
   0,5555.... em forma de fração pode ser escrito como $\frac{5}{9}$.

5. **D**
   Para transformar 10/3 em um número decimal, devemos dividir 10 por 3.
   Essa divisão resulta em 3,3333....

Exercícios de vestibulares

1. **E**
   Sendo $7{,}55 - 6{,}8 = 0{,}75$ e $\frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\% = 0{,}75$, podemos concluir que ele derrubou no máximo 6 garrafas. De fato, ele derrubou, no máximo, a garrafa de valor $6{,}8$ e 5 garrafas de valor equivalente a $0{,}75$.

2. **C**
   Desde que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ e $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$, temos $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5}{4}$.

3. **E**
   É imediato que $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$. Portanto, a resposta é 3.

4. **A**
   Tem-se que $0{,}3121212\ldots = 0{,}3 + 0{,}0121212\ldots$
   $$= 0{,}3 + \frac{1}{10} \cdot 0{,}121212\ldots$$
   $$= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot 0{,}121212\ldots$$
   $$= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{12}{99}$$
   $$= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{33}$$
   $$= \frac{99+4}{330} = \frac{103}{330}$$
   Portanto, o índice revela que as quantidades relativas de admiradores do estudante e pessoas que visitam seu perfil são 103 em cada 330.

5. B

$\sqrt[3]{((8^2)^2)^2} = \sqrt[3]{8^{2\times2\times2}}$

6. 14/99

Para solucionar essa questão, primeiro transformamos as dizimas em frações:

$0{,}66666\ldots = \frac{6}{9}$

$0{,}25252525\ldots = \frac{25}{99}$

$0{,}777777\ldots = \frac{7}{9}$

Agora, reescrevendo a expressão com frações, temos:

$\frac{6}{9} + \frac{25}{99} - \frac{7}{9} = \frac{25}{99} - \frac{1}{9} = \frac{25-11}{99} = \frac{14}{99}$

7. A

Cálculo do mínimo múltiplo comum (MMC) entre os denominadores das frações:

$\mathrm{MMC}(3,\ 4,\ 5,\ 9) = \mathrm{MMC}(3,\ 2^2,\ 5,\ 3^2) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

Sendo assim, podemos reescrever as frações como:

$\frac{3}{5} = \frac{3\cdot36}{5\cdot36} = \frac{108}{180}$

$\frac{1}{4} = \frac{1\cdot45}{4\cdot45} = \frac{45}{180}$

$\frac{2}{3} = \frac{2\cdot60}{3\cdot60} = \frac{120}{180}$

$\frac{5}{9} = \frac{5\cdot20}{9\cdot20} = \frac{100}{180}$

Portanto, a ordem que o aluno apresentou foi:

$\frac{1}{4}; \frac{5}{9}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$

8. D

Simplificando a expressão, tem-se:

$$\frac{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(\sqrt{2}+1)}{1} = 2\sqrt{2}+3+\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}+6}{2} = 3+\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

9. C

$$\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} + \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = 1 + \sqrt[3]{\frac{9}{3}} = 1 + \sqrt[3]{3}$$

10. D

Sabendo que $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, com $c = \sqrt{a^2 - b}$, temos:

$$\sqrt{32+10\sqrt{7}} = \sqrt{32+\sqrt{700}} = \sqrt{\frac{32+18}{2}} + \sqrt{\frac{32-18}{2}} = 5+\sqrt{7}$$

Analogamente, obtemos $\sqrt{32-10\sqrt{7}} = 5-\sqrt{7}$. Desse modo:

$$N = \frac{1}{\sqrt{32+10\sqrt{7}}} + \frac{1}{\sqrt{32-10\sqrt{7}}} = \frac{1}{5+\sqrt{7}} + \frac{1}{5-\sqrt{7}} = \frac{5-\sqrt{7}}{18} + \frac{5+\sqrt{7}}{18} = \frac{5}{9}$$

Portanto, $a + b = 5 + 9 = 14$.